二つの価格理論 - ワルトとレマク -

經濟論叢

第123巻　第3号

昭和54年3月

京都大學經濟學會

二つの価格理論

——ワルトとレマク——

有賀裕二

はじめに

ケインズを偉大な例外として，今日の価格理論の多くは，同時決定論のかたちで与えられているといっても過言ではない。しかるに，生産経済における価格理論は，1930年代を相前後して線型理論の観点から，数学者たちによって独自に産みだされてきたともいえる。彼らの理論は，第二次大戦を契機とした線型不等式論の発展に伴い洗練され，1950年代に簡明なかたちで再登場し，経済学者たちの興味をひくところとなった[1)2)]。

私がこれから本稿で扱おうとするパイオニアーたち，つまり，レマク[3)]，ワルト[4)]，ノイマン[5)]といった人たちは，みな経済学者ではない。レマクはスラッファ[6)]とは独立に「商品による商品の生産」モデルの非負解をいちはやく解いたし，ノイマンは拡大（縮小）再生産モデルの非負解について，一方，ワル

1) Kuhn, H. W., and A. W. Tucker, *Contributions to Theory of Games*, Princeton U. P., 1950.

2) Kuhn, H. W., and A. W. Tucker, *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton U. P., 1956.

3) Remak, R., „Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden?", *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Band 131, 1929.

4) Wald, A., „Über die eindeutig positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 6, 1933–4.

5) von Neumann, J., „Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 8, 1937 (translated in *Review of Economic Studies*, 1945–6).

6) Sraffa, P., *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge U. P., 1960（菱山・山下訳「商品による商品の生産」有斐閣，昭和37年）.

トはワルラス＝カッセル型生産モデルの非負解についてはじめて厳密な存在証明を与えた。

彼らの表現は，時代の制約から古くなった面があり，なおかつ，数学的に難解である。このために，その後，ある特定の立場からの解釈が施される余地を与えた。とくにワルトについては，線型計画理論と限界生産力説の立場から再解釈されるようになった。しかしレマク，ワルト，ノイマンはみな経済学の常識から自由な数学者たちである。この自由は時として，経済的な真理の宝庫となる。実際，彼らは「長い間の逃れようとする闘い」（ケインズ）の手助けとなるだろう。これまで，この意義を重視することは比較的少なかったように思える。われわれは，とくに彼らの線型性についてのアイディアが既知の経済理論の特殊なケースとして吸収できるということにばかり囚われて，その独自な意義を評価する努力をおこたってきたところがあるのではないだろうか。

I ワルトの価格理論

ソローは，かつてつぎのように述べたことがある。「限界生産力説といったようなものは本来全く存在しない。……ただ一財しか存在しないというのでなければ，方程式は未知数よりも少なく，これらの方程式は一般に決定できない。したがって，それらの方程式は財についての需要方程式によって補充されねばならない。」[7] しかし，これはなにも限界生産力説に固有なことではなく，広くは新古典派的な生産理論のもつ構造に根ざすことである。ソローの主張に相似の特徴は，すでにその30年以上も前に，線型理論の枠組のなかで「ワルトの定理」[8] によって示されていたといえるだろう。

ワルトがもとにしたモデルは，ワルラス＝カッセル・モデルである。このモデルでは，n 個の生産物 S_j は，生産物 S_j とは相異なる m 個の生産手段 R_i の

7) Solow, R. M., "Distribution in the Long and Short Run" in Marchal, J., and B. Ducros (ed.), *The Distribution of National Income*, 1968, p. 430.

8) Wald (1933-4), *loc. cit.*, S. 12.

r_i 単位を結合して生産される。S_j の生産量を s_j とする。各工程は，生産物 S_j 1単位の生産のために，生産手段 R_i を a_{ij} 単位使用する。また，S_j の単位価格を σ_j, R_i の単位価格を ρ_i とする。

生産手段の需要方程式（m個）

$r_i = a_{i1}s_1 + \cdots + a_{in}s_n$ $(i=1, \cdots, m)$

生産物の費用・価格方程式（n個）

$\sigma_j = a_{1j}\rho_1 + \cdots + a_{mj}\rho_m$ $(j=1, \cdots, n)$

「ワルラス＝カッセル型の生産構造」は　この二組の方程式体系によって示される。ワルラスやワルトは，この構造のなかにあらわれる「生産手段」を過去から相続された本源的な生産要素であり，その存在量を所与の経済データとみなした。さらに，生産物 S_j を s_j 単位生産するときの単位価格 σ_j は $f_j(s_j)$ の値をとることがわかっている，という仮定をおく。

$\sigma_j = f_j(s_j)$　$(j=1, \cdots, n)$

これによって，ワルラス＝カッセル・モデルは，$m+2n$個の方程式にたいして，m個の未知数 ρ_i, n個の未知数 σ_j, n個の未知数 s_j をもつ。この体系の特徴は，n個の既知の函数 f_j を導入することによってワルラス＝カッセル型の生産構造を閉じている，ことである。

これらの方程式が確定されるとしても，決定されるべき諸価格や生産量が負になる体系を解くのでは，経済学的にいみがない。また，生産手段の価格が0であるということは，それらの生産手段を無償で手に入れることができるということにほかならないが，ワルトたちは，その理由を，それらの存在量が完全に利用しつくされていないということに求めた。ワルトはつぎのように述べている。「『稀少な』生産手段は，ワルラスのばあい，経済のデータとみなされている。しかるに，もうそういうわけにはゆかない。というわけは，生産手段の稀少性，あるいは，非稀少性は，生産物にたいする需要函数 $f_j(s_1, \cdots, s_n)$ や技術係数 a_{ij} 等に依存しているからである。」[9] つまり，過去から相続される利用可能な生産手段のすべてが，完全に利用されつくすとはかぎらない。いくつ

かの生産手段 R_i は使い残される。したがって，

修正された生産手段の需要方程式（m個）

$r_i=a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n+u_i\ (i=1,\ \cdots,\ m)$

ここに，各 i について $u_i\geqq 0$ である。$u_i>0$ が該当する生産手段 R_i は「自由な」生産手段であり，これには 0 の価格が付けられるものと考える。

$u_i>0$ であるならば，$\rho_i=0$，あるいは，

$u_i\rho_i=0\ (i=1,\ \cdots,\ m)$

「修正された体系」には m 個の新しい未知数 $u_1,\ \cdots,\ u_m$ が生じるが，そのために m 個の方程式が付け加えられるので，方程式体系は確定である。この「修正された体系」が非負解をもつだろうかという「シュレージンジャーによる設問」を，ワルトはつぎのような諸仮定のもとで解いたのである。

「ワルトの定理」[10]

「方程式体系（Sch 1）

$$r_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}s_j+u_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ m)$$

$$\sigma_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\rho_i,\ \sigma_j=f_j(s_j) \qquad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

ここに，r_i と a_{ij} は所与の数，f_j は既知の函数であり，$u_i,\ \rho_i,\ s_j,\ \sigma_j$ が未知数である。

仮定 1. $r_i>0\quad(i=1,\ \cdots,\ m)$.

仮定 2. $a_{ij}\geqq 0\ \begin{pmatrix} i=1,\ \cdots,\ m \\ j=1,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}$.

仮定 3. j について $a_{ij}\neq 0$ となるような少なくとも一つの i が存在する。

仮定 4. 各 j について s_j の正の各値の函数 $f_j(s_j)$ が定義され，非負・連続・狭義単調減少[11]；さらに，$\lim_{s_j\to 0}f_j(s_j)=\infty$[12].

---

9) Wald, A., „Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1936 (translated in *Econometrica*, 1951), S. 639. この論文では，$f_j(s_j)$ は $f_j(s_1,\ \cdots,\ s_n)$ にかき直されている。

10) Wald (1933-4), *loc. cit.*, S. 12.

11) ワルトは後に解の一意性を f_j の狭義単調性のかわりに「顕示選好の仮定」を用いて証明した。Wald (1936), *loc. cit.*, S. 640.

仮定1-4が課されるとき，方程式体系（*Sch* 1）はつぎの付帯条件
$s_j \geqq 0,\ \sigma_j \geqq 0,\ \rho_i \geqq 0,\ u_i \geqq 0,\ u_i\rho_i = 0$ をみたす未知数 $u_i,\ s_j,\ \sigma_j$ にかんして一意の解体系をもつ。ただし，ρ_i の一意性は，行列式の基本定理により，
$\det|a_{ij}| \neq 0$ でないかぎり確定されない。」

ワルトは，函数 f_j のことを生産物価格をきめる（逆）需要函数であると考えた。このとき，「ワルトの定理」に「ワルラス恒等式」が密輸入されることになる。1936年の論文では，「ワルラス恒等式」の成立はワルト自身により積極的に主張されている[13]。ワルトの最初の論文に同時掲載されたK・メンガー（C・メンガーの息子）のつぎのコメントは，こうした解釈に強い影響を与えたことであろう。

ワルトの作業によって，二つの基本的な考え，つまり，「一方では，ストックがより多くなるにつれて単位価格はますます低くなるという欲望飽和法則ないしは定理，他方では，生産手段の価値は生産物の予知しうる価値を目安にするという定理ないしは生産手段の価格と生産物の価格のつながりについての表明との両者が結びつけられた。」[14]

「定理」の証明からも窺えるように，ワルトが函数 f_j のもつ役割を重要視していたことはたしかである。しかしながら，函数 f_j を導入することだけが，ワルラス＝カッセル型の生産構造をもつ経済の非負解を証明する唯一の途であると考えるべきではない。これについては次節のおわりで答えることにしたい。

II 「新古典派的生産」と「商品による商品の生産」

ワルトは，函数 f_j を（逆）需要函数であると考えて，人々が生産手段の販売から得た所得を生産される生産物の購入にあてるという商品交換のルートを「黒子」として登場させる。このため，任意の価格にたいして「ワルラス恒等

12) キューンは「不動点定理」を用いて証明した。このとき，f_j は単に非負領域で連続であればよい。Kuhn, H. W., "On a Theorem of Wald" in 2).
13) Wald (1936), *loc. cit.*, S. 647.
14) Wald (1933-4), *loc. cit.*, S. 19.

式」$\sum_{j=1}^{n} f_j(s_j)s_j=\sum_{i=1}^{m} \rho_i r_i$ が成立する。しかし，このとき，暗に，解かれた生産量 s_j は同時に均衡需要量であるという「生産物市場の需給均衡条件」を課したことになる。もしそうでなければ，（逆）需要函数と呼ぶことはできない。さらに，$\sigma_j=f_j(s_j)$ であるから，$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j s_j=\sum_{i=1}^{m} \rho_i r_i$ のかたちにかけるので，ワルラス＝カッセル・モデルの「ワルラス恒等式」は「生産手段市場の需給均衡条件」をいみすることになる。この点に目をつけたのが，キューンである。キューンは，「ワルトの定理」をつぎの線型計画問題に結びつけた[15]。

極大問題

$r_i \geqq a_{i1}s_1+\cdots+a_{in}s_n$ $(i=1, \cdots, m)$ と $s_j \geqq 0$ $(j=1, \cdots, n)$ を制約として，総生産額 $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j s_j$ を極大化する s_j を求める。

極小問題

$\sigma_j \leqq a_{1j}\rho_1+\cdots+a_{mj}\rho_m$ $(j=1, \cdots, n)$ と $\rho_i \geqq 0$ $(i=1, \cdots, m)$ を制約として，総費用額 $\sum_{i=1}^{m} \rho_i r_i$ を極小化する ρ_i を求める。

競争的な経済で線型計画の集計的な目的函数の最適化をはかること自体，疑問である。しかし，このような経済計画が実行に移されるものとすれば，「線型計画の基本定理」[16] により，生産手段市場の需給均衡が達せられることになる。線型計画（極大）問題では σ_j を所与としなければならないけれども，ワルラス恒等式は任意の σ_j について成立する。したがって，函数 f_j が適当に定義されるならば，上記の線型計画の最適解はつねに「ワルトの定理」をみたす。キューンの論文と同じ年に発表された本のなかで，ドーフマン＝サムエルソン＝ソロー(DOSSO)は，線型計画問題を限界生産力説に結びつけた。こうして彼らはつぎのドグマに達する。「あらゆる競争的一般均衡体系のなかには，産出量価値額に対する極大問題と要素報酬に対する極小問題とが隠されてる。」[17]

15) Kuhn, H. W., *loc. cit.*

16) *Ibid.*, p. 267.

17) Dorfman, R., Samuelson, P. A., and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, 1956（安井・福岡・渡部・小山訳「線型計画と経済分析」岩波書店，昭和34年），邦訳，p. 461.

第I節冒頭のソローの主張を逆にとれば，需要函数の導入は限界生産力説の復活をいみする。DOSSO の主張にしたがえば，これと同じことが，ワルラス＝カッセル・モデルについていえるのである。

線型計画と限界生産力説との関係をみるために，線型計画極大問題の制約式をワルトのようにスラック変数 u_i を導入してかき直しておくのが便利である：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j+u_i=r_i \ (i=1, \cdots, m), \text{ あるいは,}$$

$$(\mathrm{s},\ \mathrm{u})\begin{bmatrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{I}\end{bmatrix}=\mathrm{r}.$$

ここに，Aは$n\times m$次の行列，Iは$m\times m$次の単位行列である。さらに簡単のために

$$\mathrm{xB}=\mathrm{r}, \text{ あるいは,}$$

$$\sum_{s=1}^{n+m} x_s\mathbf{b}_s=\mathbf{r},$$

とかく。b_s は行列Bの第 s 行 ($s=1, \cdots, n+m$) を示す。Bは任意の非負行列なので，明らかに上式はBによって張られる凸多面錐で，R^m の部分空間を成す。しかるに，R^m 内の点 $\mathbf{r}=(r_1, \cdots, r_m)$ が所与の有限個の点 $\mathbf{b}_s$ の非負一次結合であらわされるとすれば，係数 x_s の値を適当にえらぶことによって，正係数の個数をたかだか m (R^m の次元数) 以内にすることができる。つまり，$k\in K$ について $x_k>0$ とするとき，$k\leqq m$[18)]。

$$\mathbf{r}=\sum_{k=1}^{m} x_k\mathbf{b}_k.$$

ここに，$\mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_m$ は一次独立なベクトルの組である。したがって，これらはm次元ベクトルの一つの基底となって，任意の b_s について，

$$\mathrm{b}_s=\sum_{k=1}^{m} x_{ks}\mathrm{b}_k, \text{ あるいは,}$$

$$\mathrm{b}_s=\mathrm{x}C.$$

$x_{ks}>0$ と仮定すれば ($\mathrm{b}_1, \cdots \mathrm{b}_m$) の転置行列Cは正則 (non-singular) となって，一意に，

18) 二階堂副包「現代経済学の数学的方法」岩波書店，昭和35年，p. 190.

$\mathrm{x}=\mathrm{b}_s C^{-1}$.

m次元行ベクトル x がすでに純収入の極大を与えるとき，ベクトルの組 C は「最適工程」であるという。

いま $\mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_m$ が最適工程であると仮定する。そして x の変化 $\Delta\mathrm{x}$ を考えてみる。生産手段 R_i を1単位だけ使い他に何も使わないときの生産手段の利用状況を I_i とかけば，I_i を最適工程の組 C の一次結合であらわすことができる[19]。つまり，ある $\Delta\mathrm{x}(i)$ にたいして，

$\Delta\mathrm{x}(i)C=I_i$, 詳しくかけば，

$$\Delta x_1(i)\mathrm{b}_1+\cdots+\Delta x_m(i)\mathrm{b}_m=(\overbrace{0}^{i-1},\ 1,\ \overbrace{0}^{m-i}).$$

しかし C は正則と仮定するので，一意に

$$\Delta\mathrm{x}(i)=I_i C^{-1}.$$

DOSSO は，この $\Delta\mathrm{x}(i)$ が与える純収入の変化を「第 i 生産手段の限界収入生産力」と呼んだ。これを $m(i)$ で記す：

$$m(i)=\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\Delta x_k(i)=I_i C^{-1}\sigma.$$

ここに，σ は m 次元列ベクトルである。

一方，シンプレックス規準によれば，b_s が最適工程から除外される工程であるばあい，

$$\sigma_s>\sum_{k=1}^{m}\sigma_k x_{ks}$$

だから，最適工程に含まれる b_s にたいしては，

$$\sigma_s\leqq\sum_{k=1}^{m}\sigma_k x_{ks}.$$

また，最適工程 b_s を除外することから得られる利益は正になることはないから，

$$\sigma_s\geqq\sum_{k=1}^{m}\sigma_k x_{ks}.$$

ゆえに，最適工程では，$s\in(1, \cdots, m)$ にたいして，

$$\sigma_s=\sum_{k=1}^{m}\sigma_k x_{ks}.$$

---

19) DOSSO, *loc. cit.*, 邦訳, p. 186, 204.

$\mathrm{x}=\mathrm{b}_s C^{-1}$ に注意すれば，

$$\sigma_s = \mathrm{x}\sigma = \mathbf{b}_s C^{-1}\sigma.$$

この σ_s の式に $m(i)$ を代入すれば，

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^{m} m(i)\mathrm{b}_s = b_{s1}m(1)+\cdots+b_{sm}m(m).$$

右辺を工程 b_s の「帰属費用」のいう。さらに $m(i)=\rho_i$ とおけば，

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^{m} b_{si}\rho_i.$$

つまり，最適工程では，生産手段の価格 ρ_i は限界生産力 $m(i)$ に等しくなければならない。こうして，最適解を求めるために「君の限界生産力を均等ならしめよ」[20] というのが DOSSO の結論である。ただし，以上の解釈が成立するためには，工程の選択と操業水準の選択とが **interchangeable** であって，これらの選択は純収入を与える生産物価格以外の経済的要因から独立であるという想定が隠されているということに注意すべきである[21]。

ところで，ジョーゼスキュ・レーゲン[22]は，新古典派的な生産理論のもつ特殊性を説明するために，n 個の財がある経済で，非負の投入 $(a_1, \cdots, a_n)$ を非負の産出 $(b_1, \cdots, b_n)$ に変換する工程を考える。これを

$$p\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \end{pmatrix}$$

とかき，「一般的工程」を呼ぶ。0 と正の要素を区別してかけば，ワルラス＝カッセル・モデルや新古典派生産函数のもつ工程は，

$$p\begin{pmatrix} a_1, & \cdots, & a_k, & 0, & & \cdots, & 0 \\ 0, & \cdots, & 0, & b_{k+1}, & & \cdots, & b_k \end{pmatrix}$$

のかたちにかくことができる。ここに，$a_1, \cdots, a_k$ は「本源的な生産要素の投

20) *Ibid.*, 邦訳, p. 183.

21) Pasinetti, L. L., *Lectures on the Thery of Production*, Macmillan, 1977 (邦訳近刊), p. 185.

22) Georgescu-Roegen, N., "The Aggregate Linear Production Function and its Applications to von Neumann's Economic Model" in Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley, 1951, *Chap*. IV.

入」を示している。一方，外生的な需要なしに商品生産が行なわれるような「閉じた生産構造」をもつモデルのことを，以下，「再生産モデル」と呼ぶ。いま，

$$p\begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n \\ 0, \cdots, 0, b_{k+1}, \cdots, b_n \end{pmatrix}$$

という型の工程を考えると，この工程からなるモデルの一部は，閉じた生産構造になっている。しかし本源的な生産要素が存在するので，その帰属費用を極小にする線型計画問題をつくれば，最適工程では，

工程1単位あたりの粗収入

＝その工程1単位が吸収する本源的生産要素の帰属費用＋単位直接費

が成立する[23]。$k+1, \cdots, n$ 財の価格は所与としているので，本源的要素の価値を限界生産力に等しくすることが，純収入を極大にする途である。こうして，新古典派は利潤を正当化しようとした。しかし，この理論は完全な「再生産モデル」では通用しない。これを次節で詳しくみることにしたい。

最後に，ワルラス＝カッセル型の生産構造をもつモデルの価格決定に代替的な解釈を与えよう。もし生産手段 R_i の価格 ρ_i を「再生産モデル」の基礎財（財生産のために直接・間接に用いられる財）の価格であると考えるならば，ρ_i は生産体系内の既約な技術係数行列のフロベニウス・ベクトルの成分として定数倍を除いて一意に定まる。生産手段は歴史的に所与とされるのではなく，「商品による商品の生産」から得られる。このとき，「ワルトの定理」の価格 σ_j をもつ生産物 S_j は，基礎財生産に参加しない奢侈財である。したがって，価格 σ_j をきめる方程式は非基礎財の価格決定方程式に還元できる。こうしてワルラス＝カッセル型生産モデルは，既知の函数 f_j からなる一組の方程式の代りに，基礎財の価格方程式体系を用いて閉じることができる。このばあい，ワルトのモデルは，スラッファの本の第11章「土地と差額地代」と同じモデルであるとみなすことができるだろう。

23) DOSSO, *loc. cit.*, 邦訳, p. 191.

III 再生産の理論

ゲール[24]とトムソン[25]の論文を手掛りとして，「再生産の理論」と「線型計画型の理論」の基本的な相違を明らかにしようというのが，本節の狙いである。

ゲールは，n 個の財 $G_1, \cdots, G_n$ を生産する閉じたモデル（再生産モデル）で，技術と経済の双方について「拡張率」を定義することからはじめる。生産工程 (a, b) は，非負の産出 $\mathrm{b}=(b_1, \cdots, b_n)$ を離散的な単位時間で生産するために，非負の投入 $\mathrm{a}=(a_1, \cdots, a_n)$ を必要とする。ここに，b_j, a_j は財 G_j の単位数を示す。工程 (a, b) の技術をつぎのように特定化する。

仮定 1. $\mathrm{a}=0$ ならば，$\mathrm{b}=0$ である（桃源郷の不可能性の公準）。

仮定 2. 生産空間（すべての工程の集合）Z は閉凸錐である[26]。

仮定 3. どの財 G_j も Z のなかの少なくとも一つの工程の産出である。

これらの財の集合と生産空間 Z をあわせたものから，本節のモデル M を構成する。このとき，工程 (a, b) における財 G_j の「拡張率」を

$$\alpha_j(\mathrm{a}, \mathrm{b})=b_j/a_j$$

とかく。さらに，工程 (a, b) の「技術的拡張率」を

$$\alpha(\mathrm{a}, \mathrm{b})=\min_j \alpha_j(\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

とかく。これは，工程 (a, b) で次期の再生産がボトル・ネックなしに実行可能となる技術的な極大率である。「仮定1」より $\alpha(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ は $(\mathrm{a}, \mathrm{b})\neq 0$ にたいしてつねに定義され，実数値をとる。また，「仮定3」より拡張率がすべて0になることはない。こうして「モデル M の技術的拡張率」は，$(\mathrm{a}, \mathrm{b})\in Z$ かつ $(\mathrm{a}, \mathrm{b})\neq 0$ にたいして，

$$\alpha_M=\max\ \alpha(\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

24) Gale, D., "The Closed Linear Model of Production" in 2).

25) Thompson, G. L., "On the Solution of Game-Theoretic Problem" in 2).

26) Gale, *loc. cit.*, p. 287: ① Z は R^{2n} で閉じている。② $z, z'\in Z$ ならば $z+z'\in Z$。③ $z\in Z$ かつ $\lambda\geqq 0$ ならば $\lambda z\in Z$（線型性）。

とかける。$\alpha(\mathrm{a},\ \mathrm{b})=\alpha_M$ ならば，工程は「技術的に最適である」という[27]。

われわれは，工程（a, b）の経営の目的が唯一操業規模の増大であるような経済を考察している。つまり，来年は今年の ρ 倍の仕事をすることを目指す。今期の所得で次期の費用を賄うという仮定のもとでは，係数 ρ をきめるものは，今期の利潤（剰余）にほかならない。したがって，工程（a, b）の実行可能な拡張率は，収益性により，上から有界である。財集合に指定された非負の価格 $\mathrm{Y}=(y_1, \cdots, y_n)$ と工程（a, b）が与えられるならば，工程の費用 aY，その工程から得られる次期の所得 bY が定まり，工程の収益性がわかる。

$$\beta(\mathrm{a},\ \mathrm{b}\ ;\ \mathrm{Y})=\mathrm{bY}/\mathrm{aY}$$

これを価格 Y での工程の「経済的拡張率」という。ある Y のとき，

$$\beta(\mathrm{Y})=\max\ \beta(\mathrm{a},\ \mathrm{b}\ ;\ \mathrm{Y})$$

は∞になるだろう。しかるに，「仮定１」を用いれば $\mathrm{Y}>0,\ \beta(\mathrm{Y})<\infty$ になるから，

$$\beta_m=\min_{\mathrm{Y}}\ \beta(\mathrm{Y})$$

は実数値をとる。

各工程（a, b）は，経済的に実行可能な極大率，つまり，$\beta(\mathrm{a},\ \mathrm{b}\ ;\ \mathrm{Y})$ で拡張しようとするだろう。しかし，価格が適切に指定されなければ，各工程が必要としかつ購入できる投入物を経済のその他の工程が供給することができなくなって，この率で拡張することは技術的にみて実行可能でなくなるかもしれない。したがって，再生産を実行可能にする「重ね合わされた価格体系」[28] Y を求める必要がある。このような価格は，極大率 α_M で経済的に拡張できるといういみで最適工程（$\bar{\mathrm{a}}$, $\bar{\mathrm{b}}$）が存在し，なおかつ，いかなる工程もそれ以上の率で経済的に拡張する誘因もなくまたそれが不可能であるときに，与えられる。ゲールは，これをつぎの定理に要約している。

27) *Ibid.*, p. 288. この定義は，あるとび抜けて高い拡張率をもつ最適工程がただ一つだけしか存在しない事態を許す。

28) „Superponiertes Preissystem". Remak, *loc. cit.*, S. 707, S. 725–733.

定理 1（ゲール）

「M が技術的拡張率 α_M をもつモデルであるならば，

(1) $\beta(\bar{a}, \bar{b}; Y) = \alpha_M$

(2) $\beta(a, b; Y)$ が定義されるすべての $(a, b) \in Z$ にたいして $\beta(a, b; Y) \leqq \alpha_M$

となるような最適工程 $(\bar{a}, \bar{b})$ と価格ベクトル Y が存在する。」

ゲールによれば，いかなる最適工程 (a, b) も $b>0$ をみたすとき，モデル（経済）M は正則である (regular) という。このとき，すべての財が生産されているのでなければ，経済は極大率 α_M で拡張しえない。

定理 2（ゲール）

「M が正則 (regular) ならば，$\alpha_M = \beta_m$.」[29]

さて，ノイマン・モデルの工程は，うえでみた工程の特殊なケースである。ノイマンのばあい，生産空間 Z はベクトル (a_i, b_i) の有限な集合によって張られる凸多面錐である。(a_i, b_i) を基礎的工程と呼ぶ。一般的工程 (a, b) は基礎的工程の非負一次結合である。

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i, b_i)$$

この非負の x_i は第 i 番目の基礎的工程の操業水準（集約度）である。これを行列表示すれば，

$$(a, b) = (XA, XB).$$

ここに，a_i, b_i は行列 A, B の第 i 行ベクトル，a^j, b^j は行列 A, B の第 j 列ベクトルを示すものとする。明らかに $X = (x_1, \cdots, x_m)$ が工程 (a, b) をきめるから，ノイマン・モデルの「技術的拡張率」は X の函数のかたちにかかれる。

$$\alpha_j(X) = Xb^j / Xa^j, \ \alpha(X) = \min_j \alpha_j(X).$$

一方，「経済的拡張率」は価格 Y の函数であるから，

$$\beta_i(Y) = b_i Y / a_i Y, \ \beta(Y) = \max_i \beta_i(Y),$$

とかける。

29) 正則であることは，$\alpha_M = \beta_m$ の必要条件ではない。Gale, *loc. cit.*, p. 299.

「ノイマンの定理」

「(1) $\alpha XA \leqq XB$

(2) $\alpha Xa^j < Xb^j$ ならば，$y_j=0$.

(3) $\beta AY \geqq BY$

(4) $\beta a_i Y > b_i Y$ ならば，$x_i=0$.

となるようなベクトル $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$ と正数 α, β が存在する。」[30]

ノイマン・モデル (1) — (4) が正則であるならば，つぎの定理が成り立つ。

定理 2′ (ゲール)

「正則なノイマン・モデルにたいして，

$\max \alpha(X) = \min \beta(Y)$，あるいは代替的に，

$\max_X \min_j \alpha_j(X) = \min_Y \max_i \beta_i(Y)$.」

正則の定義から，最適工程では $XBY>0$ である。「定理2′」より，正則なノイマン・モデルではつねに $\alpha=\beta=XBY/XAY$ となる正の解をみいだせる。さしあたり実行可能であるかどうかは問わないで，この範囲でノイマン・モデルをある種のゲームとして解釈し直してみよう。

(1′) $X(B-\alpha A) \geqq 0$

(3′) $(B-\alpha A)Y \leqq 0$

(5) $XBY>0$

(6) X と Y は，それぞれ，その成分が合計して1になる確率ベクトルである。

ここで，$P=\alpha/(1+\alpha)$ とおけば，行列 B と $-A$ は，凸結合の行列 $M_p=(1-P)B+P(-A)$ のかたちにすることができる。ゆえに，

(1″) $XM_p \geqq 0$

(3″) $M_p Y \leqq 0$.

30) シャンパーナウンは，(1)を「生産体系の規則」，(2)を「自由財の規則」，(3)を「価格体系の規則」，(4)を「収益性の規則」と呼んだ。Chanpernowne, D. G., 'A Note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium",' *Review of Economic Studies*, 1945-6, pp. 13-15.

こうして，トムソンは，(1′)，(3′)，(5)，(6) で定義されるゲーム[31]にたいして，つぎの定理が成立することを示した[32]。

「トムソンの定理」

「P が行列 M_p を公正なゲームにするような最大の値（ないしは最小の値）をとるならば，$xBY>0$ となるような M_p にとっての最適戦略の組（X, Y）が存在する。」

経済が $\alpha=\beta$ となるとき，「トムソンの定理」は，M_p を利得係数行列とするゲームとして解釈できる余地を与えるようにみえる[33]。ゲールの「定理 2′」は，さらにこれを支持しているようにさえ思われる。果してそうだろうか。解答を与える前に，トムソンが与えた数値例をみておこう[34]。

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

この経済は正則であるばかりでなく，$A+B>0$ であるので，$\alpha=\beta$ は一意に定まる[35]。明らかに，ゲームが公正になる一意の P の値があるはずである。実際，

$$\begin{vmatrix}2-2P & 1-2P\\ 1-2P & 1-P\end{vmatrix}=1-2P^2=0$$

から，$P=1/\sqrt{2}>0$。ゆえに，この P にたいする一意の最適戦略は，

$$X=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\quad ただし，\sum_{i=1}^{2}x_i=1,$$

---

31) 「仮定 3」より $A\geq 0$,「正則の仮定」より最適工程では $B>0$ だから，ゲームの値を v とすると，$v(-A)<0$, $v(B)>0$. また,「公正なゲーム」とは $v=0$ となるゲームをいう。

32) Thompson, *loc. cit.*, p. 281.

33) 森嶋は，労働を唯一の本源的生産要素とする「開かれた」ノイマン・モデルをつくったとき，公正賃銀率 Ω をパラメーターとするゲームを提案した。この Ω は「トムソンの定理」の P に対応する。Morishima, M., *Theory of Economic Growth*, Oxford U. P., 1969, p. 120.

34) Thompson, *loc. cit.*, pp. 276–80.

35) Kemeny, J. G., Morgenstern, O., and G. L. Thompson, "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, 1956, p. 121.

$$Y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\quad ただし，\sum_{j=1}^{2} y_j=1,$$

である。しかしながら，解はみな無理数になっている。つまり，ノイマン・モデルは有理数体で解くことができない。

この事実から，ノイマン・モデルをゲームとしても線型計画としても解釈することには無理があることがわかる。ゲールは，「定理2′」をつぎのようにふえんしている。

$\max \alpha(X)=\min \beta(Y)$ は「線型計画の双対定理を思いださせるし」，一方，$\max\limits_{X}\ \min\limits_{j} \alpha_j(X)=\min\limits_{Y}\ \max\limits_{i} \beta_i(Y)$ は「ゲームのミニ・マックス定理を連想させる。しかしながら，一つの本質的な相違が銘記されるべきである。線型計画の最適やゲームの値はつねに問題の係数のタームで有理数で表現され得る。他方，線型モデルの拡張係数は，例からみてとれるように，たとえ基礎的工程が有理数のベクトルによって与えられたとしても，無理数になり得るのである。」[36)]

再生産モデルは，拡張係数を目的函数にしている。このいみで，線型計画問題やゲームのモデルと本質的に相違しているわけである。

IV　レマクの価格理論

価格理論にとっての一つの分れ目は，いわゆる閉じたレオンチェフ・モデルにどのような解釈を与えるのかということにある。前節との関連ですぐに指摘できるのは，「重ね合わされた価格体系」を解くための出発点としてレオンチェフ・モデルを解釈する方向である。しかしその反面，クープマンスのようにレオンチェフ・モデルは「効率的な配分の指標としての価格にかんしてよりも，むしろ会計恒等式にかんするようなもの」としての価格を扱うにすぎないといって，捨て去る方向もある。数学者レマクのパイオニアー的論文は，こうして一蹴されてしまった[37)]。レマクの主要な貢献は，アクティヴィティ・アナリシ

36)　Gale, *loc. cit.*, p. 294.

37)　Koopmans, T. C., "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities"

スについてのアイディアの創始者たちに属するということ以上に，スラッファとは独立に，『商品による商品の生産』の第1章のモデルについて，非負の価格の存在証明を与えたことにあるだろう[38]。

レマクは，各人が使用し生産する商品量を既知として，「資金的にみても辻褄のあう経済が生じ，なおかつ，各個人にとって収入と支出がバランスを保つような」非負の価格体系，つまり，「重ね合わされた価格体系」をみつけようとした。このとき，「価格は各人にとって提供した商品にたいする収入が受け取った商品にたいする支出に等しくなるように測定されていなければならない。」[39]

非負価格の存在証明を与えるばあい，レマクは，スラッファと同様に，「フロベニウスの定理」に気づいていなかった。その代りにまず，「収支均等の規準」を用いて，それぞれ，正の価格，負の価格，無償で商品を提供する人々をグループ分けして，つぎの事実を導く。「正の価格のグループも負の価格のグループも各々両者の一方のグループに商品を提供しないときにかぎり，解は正，負，0の価格を含むことができる。」しかし「ある解に正の価格も負の価格もあらわれるならば，負の価格を0でおきかえるなり，正の価格を0でおきかえるかするならば，一層適当な解が得られる。」「解が負の価格だけしか含んでいないならば，符号の変換によって，正の価格だけをもった解が得られる。」[40]結局，「すべての価格が正ないしは0であるが，総価格は0にならないような解がつねに存在する。」レマクは，これを確かめたうえで，非負の価格をもつ任意のグループ K と Λ との間の商品交換の流れの分析に入る。

グループ Λ に属する個人 λ からグループ K に属する個人 κ へ一方向的に

---

in Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951, p. 31.

38) Remak, *loc. cit.*, *Kapitel* III.

39) *Ibid.*, S. 725.

40) 「ゴミは負の価値をもった商品である。ゴミの集収ないしは別の地所にゴミを捨てる認可のために支払いがなされなくてはならないからである。しかし，このようなケースでは，ゴミではなくてゴミの集収ないしは地所の引渡しが正の価格をもった商品として記されるものと考える。」*Ibid.*, S. 726.

商品交換が行なわれるとき，K は Λ より「高次である」という。より高次なグループが存在しないとき，「最高次のグループ」が定まる。また，グループ間で間接的な商品交換さえも一切行なわれることがなければ，それらのグループは「比較不可能である」という。したがって，最高次のグループ同士は比較不可能である。レマクは，これらのグループ間の商品交換を分析し，「収支均等の規準」を用いてつぎのような結論を得る[41]。「各々の最高次のグループ K にたいして，そのグループに属する x_λ と $a_{\kappa\lambda}$ にかんしてだけ問題を解く。ここに $\kappa\in K$, $\lambda\in K$ である。」ただし，$a_{\kappa\lambda}$ は λ から κ に提供される商品量，x_λ はその価格を示す。「のこりのすべての x_λ は0に等しいものとされ，こうして基本解が得られる。」

一方，ゲールは前節のノイマン・モデルにさらに

(1) 基礎的工程と同数の財がある

(2) (a_i, b_i) の産出は財 G_i だけである

という二つの条件を課したものがレオンチェフ・モデルであり，それは「拡張理論がとくに簡明でエレガントなかたちをとったもの」であるという見解にたっている[42]。レオンチェフ・モデルに拡張理論を適用すれば，極大率 α_M で拡張する最適工程では過剰生産はありえないということがわかる。つまり，

定理 1（ゲール）

「レオンチェフ・モデルで X が最適集約度ベクトルであるならば，$\alpha_M \mathrm{XA}=\mathrm{X}$.」

A は任意の非負行列なので，この定理により，「われわれは付随的に非負行列が非負の固有値とベクトルをもつという有名な事実を証明したことになる。」[43]

ところで，モデル M' の工程により使用されるどの財も M' の少なくとも一

41) *Ibid.*, S. 731.
42) Gale, *loc. cit.*, p. 286.
43) *Ibid.*, p. 300.

つの工程によって生産されるならば，「M' はモデル M の小モデルである」という。これは M' の技術的拡張係数が正になることを保証する。「レオンチェフ・モデルでは，小モデルの共通部分も小モデルである。」また，モデル M が真の小モデルをなにも含まないならば，「M は既約である」という。

定理 2（ゲール）

「レオンチェフ・モデルの既約な小モデルは互いに素であり，いかなる財も一つ以上の既約な小モデル以外の投入にはなりえない。」

この定理によれば，レオンチェフ・モデルの行列 A は，適当に番号をつけかえて，つぎのようなかたちに直すことができる[44]。

$$
\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\mathrm{A}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & \mathrm{A}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & \mathrm{A}_K & 0 \\ \hline
\multicolumn{5}{c}{\mathrm{A}'}
\end{array}\right]
$$

ここに，小行列 A_i は既約な小モデルであり，また短形小行列 A′ はいかなる既約な小モデルにも属さないような工程に対応している。レマクにおいては技術係数は産出単位あたりではなく絶対量のタームで述べられているということに注意すれば，レオンチェフ・モデルは，レマクの用語でつぎのようにいいかえることができるだろう。互いに素な小モデルは「比較不可能なグループ」を，小行列 A_i はそれぞれ「最高次のグループ」を示す。また，なんの既約な小モデルにも属さない短形行列 A′ は「最高次でないグループ」を示す。

定理 3（ゲール）

「$\alpha_M = \max\limits_i \alpha_i$.」

しかるに，「定理 2」とレオンチェフ・モデルの双対性により，**Y** を価格ベクトル，β を経済的拡張率とすれば，

44)　*Ibid.*, p. 301.

$\beta_m AY = Y.$

「定理3」とレオンチェフ・モデルの「正則性」により，

$\beta_m = \alpha_M = \max_i \alpha_i.$

したがって，商品量 a_{n1} がなんの既約な小モデルに属さないならば，λ の提供する商品の価格は0とおかれる。つまり，「最高次でないグループに属する価格は0とおかれる。」[45] こうして，レマクとゲールの結論は一致する。

定理 4

「既約なレオンチェフ・モデルでは，価格ベクトルは正であり，正の定数倍を除いて一意に定まる。」

付録.「ワルトの定理」の証明について

ワルト自身が与えた証明は「煩雑晦渋である」といわれている。しかし，私はワルトの証明[46]の概要を直接紹介した人を知らない。この付録でそれを試みることにしたい。

ワルトは「帰納法」を用いて定理に証明を与えた。つまり，$n-1$個の産業について定理が成り立つと仮定する。本定理の証明に入る前に，ワルトはいくつかの事実を証明する。

まず，f_j の単調減少性と $u_i\rho_i=0$ とを用いて，「生産手段の増加は生産手段の価格を上昇させることはない」(補助定理1)。また「$r^\nu, r\in R^m$ として，$\lim_{\nu\to\infty} r^\nu = r$ とする。」このとき「r^ν は r に収束するので，S^ν は有界である。S^ν の有界性から U^ν の有界性もしたがう。さらに，ρ^ν も有界である」(補助定理2)。$r\neq 0$ のばあいの ρ^ν の有界性の証明のためには，f_j の狭義単調減少性と $u_i\rho_i=0$ に注意して，背理法を用いればよい。ところで，本稿第II節でみたように

$SA+U=r$, あるいは，$XB=r$

は凸面錐である。「凸多面錐は R^m の閉集合である」という事実から，各 ν にたいして

$S^\nu A+U^\nu=r^\nu$, $S^\nu \geqq 0$, $U^\nu \geqq 0$

45) Remak, *loc. cit.*, S. 731.

46) Wald (1933-4), *loc. cit.*, S. 12-17.

が解をもてば

$sA+U=r,\ S\geqq 0,\ U\geqq 0$

も解をもつ[47]。$A\rho=\sigma$ も凸多面錐である。以上の事実から，「$\nu\to\infty$ のとき，U^ν, ρ^ν, S^ν, σ^ν が U, ρ, S, σ に収束するならば，後者は（*Sch* 1）の解体系である」（補助定理３）。

さて，第 n 産業の生産量 s_n を大きくとれば，$r_i-a_{in}s_n$ が第 n 産業で一番多く使用される生産手段 R_i のところで0になるような生産量 $\bar{\lambda}$ をみつけることができる。$0\leqq\lambda<\bar{\lambda}$ の λ に対応する（*Sch* 1）の解 ρ で与えられる $\sigma_n=\sum_{i=1}^{m}a_{in}\rho_i$ の集合を $\Pi(\lambda)$ とする。ワルトは，「補助定理1–3」を用いて，$\Pi(\lambda)$ が空でない有界閉集合であることを確かめ，その端点を $\pi(\lambda)$ とする。$\lambda<\lambda^\nu<\bar{\lambda}$ で $\lim_{\nu\to\infty}\lambda^\nu=\lambda$ となる数列があれば，$\{\pi(\lambda^\nu)\}$ は有界である。このとき，$\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}}\pi(\lambda)>f_n(\bar{\lambda})$ と $\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}}\pi(\lambda)\leqq f_n(\bar{\lambda})$ との二つのケースが考えられる。後者のケースでは，生産手段の価格が有界になる。われわれは，後者のケースについてだけみることにする。

生産量 $s_n=\bar{\lambda}$ のとき，第 n 生産物の生産のためにだけ使用しつくされてしまう生産手段の数は，複数になりうる。このような生産手段を $R_1, \cdots, R_k$ とする。こうして，方程式体系（*Sch* 1）は n 個の産業からなる体系（*Sch* 2）にかき直せる。

方程式体系（*Sch* 2）

$r_i=\frac{r_i}{\bar{\lambda}}s_n+u_i\ (i=1, \cdots, k)$

$r_i=a_{i1}s_n+\cdots+a_{in}s_n+u_i\quad (i=k+1, \cdots, m)$

$\sigma_j=a_{k+1j}\rho_{k+1}+\cdots+a_{mj}\rho_m\ (j=1, \cdots, n-1)$

$\sigma_n=a_{1n}\rho_1+\cdots+a_{mj}\rho_m$

$\sigma_j=f_j(s_j)\qquad (j=1, \cdots, n)$

さらに，この（*Sch* 2）で，最初の k 個と σ_n からなる方程式を除去し，また $s_n=\bar{\lambda}$ とおけば，$n-1$個の産業からなる体系（*Sch* 3）が得られる。

方程式体系（*Sch* 3）

$r_i-a_{in}\bar{\lambda}=a_{i1}s_1+\cdots+a_{i\ n-1}s_{n-1}+u_i\ (i=k+1, \cdots, m)$

$\sigma_j=a_{k+1j}\rho_{k+1}+\cdots+a_{mj}\rho_m\ (j=1, \cdots, n-1)$

$\sigma_j=f_j(s_j)\ (j=1, \cdots, n-1)$

---

47) 二階堂，前掲書，p. 193.

この（*Sch* 3）は，帰納法の仮定により，$s_1, \cdots, s_{n-1}$ において一意となる解をもつ。

いま（*Sch* 3）の解体系を

$$u^0_{k+1}, \cdots, u^0_m; \rho^0_{k+1}, \cdots, \rho^0_m; s^0_1, \cdots, s^0_{n-1}; \sigma^0_1, \cdots, \sigma^0_{n-1}$$

とする。この解体系と $u_i=0$ $(i=, \cdots, k)$, $s_n=\bar{\lambda}$ を（*Sch* 2）に代入すれば，

$$\sigma_n=a_{1n}\rho_1+\cdots+a_{mn}\rho_m,\ \sigma_n=f_n(s_n)$$

を除いて，（*Sch* 2）はみたされる。ところで $\rho_1, \cdots, \rho_k$ は，定義により第 n 産業だけで使用しつくされてしまう生産手段の価格であるので，σ_n にかんする方程式において任意にえらんでよい。したがって，

$$f_n(\bar{\lambda}) \geqq a_{k+1n}\rho^0_{k+1}+\cdots+a_{mn}\rho^0_m$$

が成り立てば，$n-1$個の産業で成立する解は，n 個の産業で成立する解でもあり，証明が完成する。

実際，（*Sch* 2）で $s_n=\lambda^\nu$ $(\lambda<\lambda^\nu<\bar{\lambda})$ とおいたとき，帰納法の仮定より，解 ρ^ν が存在して，$\rho^\nu_1=\cdots=\rho^\nu_k=0$。「補助定理 2-3」より，$\lambda^\nu\to\lambda$ のとき $\{\rho^\nu_i\}\to\{\rho^0_i\}$ $(i=k+1, \cdots, m)$ となり，

$$\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}} \pi(\lambda) \geqq a_{k+1\,n}\rho^0_{k+1}+\cdots+a_{mn}\rho^0_m$$

である。われわれは，$f_n(\bar{\lambda}) \geqq \lim_{\lambda\to\bar{\lambda}} \pi(\lambda)$ のケースを考察しているので，

$$f_n(\bar{\lambda}) \geqq a_{k+1\,n}\rho^0_{k+1}+\cdots+a_{mn}\rho^0_m$$

がしたがう。

（昭和53年 8 月10日）